

Ein schneller Algorithmus zur bilinearen Interpolation in Ankerpunktnetzen

VON FRANZ-JOSEF BEHR, Karlsruhe, und STEFAN LUTZ, Aarau

Zusammenfassung

Zur Transformation von Bilddaten wird die Beziehung zwischen Ausgangsbild und Ergebnisbild häufig zunächst über Ankerpunkte hergestellt, zwischen denen weitere Bildpunkte über Interpolationsverfahren transformiert werden. Liegen Ankerpunkte im Ergebnisbild in Form eines Rechteckrasters vor, so können Zwischenpunkte bilinear transformiert werden.

Für die Interpolation größerer Punktmengen kann diese Interpolation auf einen flächenhaften Ansatz erweitert werden, der sehr rechenzeit-effiziente Bearbeitung gestattet. Der entsprechende Algorithmus wird vorgestellt und in seinem Laufzeitverhalten mit konventioneller bilinearer Interpolation sowie – für den Fall einer perspektiven Beziehung der Bilder zueinander – mit direkter Bestimmung über Kollinearitätsgleichungen verglichen. Eine Genauigkeitsabschätzung des Interpolationsverfahrens wird für verschiedene Aufnahmesituationen gegeben.

Interpolation Between Anchor Points by a Multiple Point Bilinear Interpolation Algorithm

Transformation of image data between two digital images can be performed using a grid of anchor points. Between these anchor points, all other points can be transformed using bilinear interpolation. A fast algorithm for multiple bilinear interpolation is described. Compared with conventional bilinear resp. transformation using collinearity equations, the proposed incremental solution is turned out to be very time efficient.

Interpolation bilinéaire entre des points fondamentaux par un algorithme efficace

La transformation des données entre deux images digitalisées est effectuée souvent en utilisant un réseau des points fondamentaux. Entre ces points, tous les autres points peuvent être transformés par une interpolation bilinéaire. On décrit un algorithme efficace pour l'interpolation multiple bilinéaire. En comparaison avec des transformations bilinéaires conventionnelles, utilisant des équations de collinéarité, la solution incremental proposée se montre très économe concernant le temps consommé.

1. Einleitung

Bei vielen Anwendungen in Photogrammetrie und Fernerkundung wird zur effizienten Transformation von Bilddaten die Beziehung zwischen Ausgangsbild und Ergebnisbild häufig zunächst über Ankerpunkte hergestellt, zwischen denen die übrigen Bildpunkte über Interpolationsverfahren transformiert werden.

Einsatzmöglichkeiten finden sich z. B. bei Erzeugung von Orthophotos auf digitalem Wege [5], bei Entzerrung von Abtastdaten [4], bei der Abtastung ruhender Vorlagen (Scanning) sowie im Rahmen automatischer Höhenbestimmung über Korrelationsverfahren [2].

Dabei ist die Beziehung zwischen Ausgangs- und Ergebnisbild i. a. durch eine strenge Abbildungsvorschrift festgelegt. Eine solche Beziehung ist beispielsweise bei perspektiver Abbildung durch die Abbildungsgleichungen [1], bei Abbildung zweier Ebenen aufeinander über eine projektive Beziehung oder in anderen Fällen über eine Affintransformation oder Polynome gegeben.

2. Bilineare Interpolation

Liegt im Ergebnisbild ein regelmäßiges Raster in Form von Rechtecken vor, die im Ausgangsbild verzerrt sein können, so lassen sich Zwischenpunkte durch bilineare Interpolation bestimmen.

Dazu wird zunächst zur Transformation von Ausgangs- in Ergebnisbild aufgrund der vorliegenden Beziehung zwischen Ausgangs- und Ergebnisbild ein Netz aus Ankerpunkten bestimmt (siehe Abb. 1); ΔX bezeichnet dabei den Abstand der Ankerpunkte in X-Richtung, ΔY den

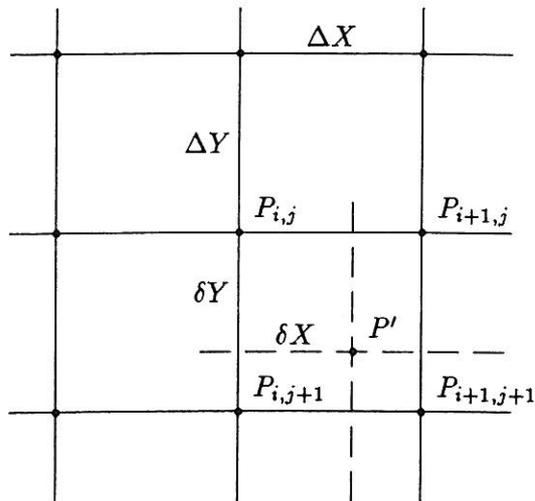


Abb. 1 Bestimmung von Zwischenpunkten über bilineare Interpolation

Abstand in Y-Richtung. Über δX und δY ist die Lage des zu interpolierenden Punktes P' relativ zu den vier umliegenden Ankerpunkten P_{ij} , $P_{i+1,j}$, $P_{i+1,j+1}$ und $P_{i,j+1}$ gegeben. Jedem Ankerpunkt sei ein Attribut A zugeordnet. Solche Attribute sind beispielsweise Rechts- und Hochwert oder auch Höhe eines Punktes.

Aus den Attributen $A_{i,j}$, $A_{i+1,j}$, $A_{i+1,j+1}$ und $A_{i,j+1}$ wird das entsprechende Attribut A' des Punktes P' über bilineare Interpolation bestimmt. Dazu werden die Werte δX , δY zunächst auf eine Einheitsmasche normiert:

$$dx = \frac{\delta X}{\Delta X}$$

$$dy = \frac{\delta Y}{\Delta Y}$$

Der zu interpolierende Wert A' wird dann berechnet nach [3]:

$$\begin{aligned} A' = & (1 - dx) \cdot (1 - dy) \cdot A_{i,j} + \\ & dx \cdot (1 - dy) \cdot A_{i+1,j} + \\ & dy \cdot (1 - dx) \cdot A_{i,j+1} + \\ & dx \cdot dy \cdot A_{i+1,j+1} \end{aligned} \quad (1)$$

Gl. 1 kann für effiziente Berechnung umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} A' = & A_{i,j} + \\ & dx \cdot (A_{i+1,j} - A_{i,j}) + \\ & dy \cdot (A_{i,j+1} - A_{i,j}) + \\ & dy \cdot dx \cdot (A_{i,j} - A_{i+1,j} - A_{i,j+1} + A_{i+1,j+1}) \end{aligned} \quad (2)$$

Gl. 2 muß zur lagemäßigen Interpolation von Punkten zwischen den Ankerpunkten für jeden Koordinatenwert X , Y einmal durchlaufen werden. Im folgenden wird gezeigt, wie dieses Verfahren zur Interpolation mehrerer Punkte innerhalb einer Masche beschleunigt werden kann.

3. Flächenhafte bilineare Interpolation

Für die Interpolation mehrerer Punkte innerhalb einzelner durch Ankerpunkte vorgegebenen Maschen wird die Interpolation (Gl. 2) in eine inkrementelle Lösung überführt. Hierbei kann die aufwendige Berechnung auf einfache Additionen zurückgeführt werden, so daß eine sehr rechenzeiteffiziente Bearbeitung ermöglicht wird. Der Algorithmus wird anhand von Abb. 2 erläutert.

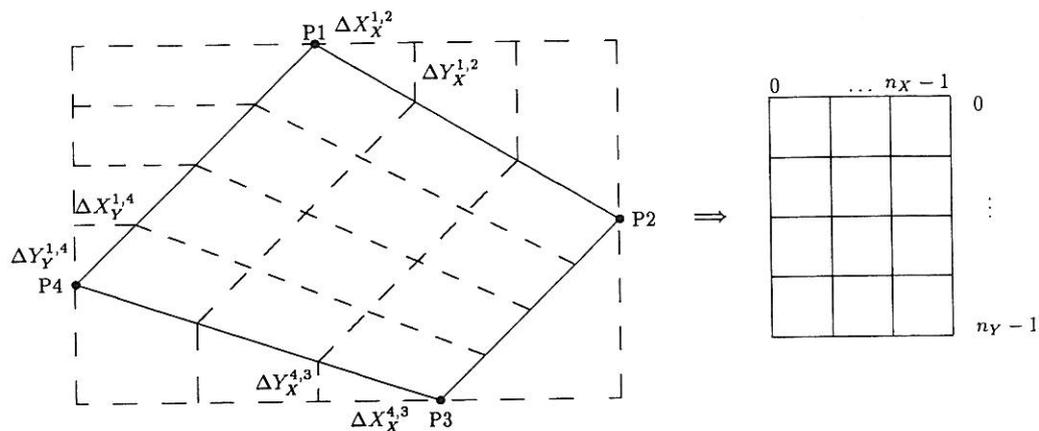


Abb. 2 Flächenhafte bilineare Interpolation

Mit n_x wird die Anzahl der in Zeilenrichtung zu interpolierenden Punkte mit n_y die Anzahl der Punkte in Spaltenrichtung bezeichnet.

Zur Bestimmung der Interpolationspunkte werden vorab folgende Größen bestimmt:

$$\begin{aligned} \Delta X_x^{1,2} &= \frac{x_2 - x_1}{n_x} & \Delta X_x^{4,3} &= \frac{x_3 - x_4}{n_x} & \Delta X_y^{1,4} &= \frac{x_4 - x_1}{n_y} \\ \Delta Y_x^{1,2} &= \frac{y_2 - y_1}{n_x} & \Delta Y_x^{4,3} &= \frac{y_3 - y_4}{n_x} & \Delta Y_y^{1,4} &= \frac{y_4 - y_1}{n_y} \end{aligned}$$

Aus diesen Werten wird noch

$$\delta X_x = (\Delta X_x^{4,3} - \Delta X_x^{1,2}) / n_y$$

und

$$\delta Y_x = (\Delta Y_x^{4,3} - \Delta Y_x^{1,2}) / n_y$$

berechnet. ΔX_x ist die Koordinatendifferenz in X-Richtung zwischen zwei Punkten in einer Zeile, ΔY_y entsprechend die Koordinatendifferenz in Y-Richtung (Spaltenrichtung) zwischen zwei zu interpolierenden Punkten.

ΔX_x wird mit $\Delta X_x^{1,2}$ initialisiert; dieser Wert bleibt konstant für eine Zeile und wird nach jedem interpolierten Punkt zu dem aktuellen Koordinatenwert addiert. Für die folgende Zeile wird ΔX_x um δX_x erhöht. X_{start} bezeichnet den Startwert für die Bestimmung der X-Koordinate zu Beginn einer Zeile; X_{start} wird über X_1 initialisiert und nach jeder Zeile um $\Delta X_y^{1,4}$ erhöht. Nach n_y Zeilen ist der Wert von $\Delta X_x = \Delta X_x^{4,3}$ und der des Startwertes $X_{\text{start}} = X_4$. Entsprechend wird für die Y-Koordinate verfahren.

Die Interpolation wird im folgenden Abschnitt in PASCAL-ähnlicher Notation vorgestellt; die Anpassung an anderen Hochsprachen kann leicht erfolgen. ix_{pix} ist dabei die Laufvariable in Zeilenrichtung, iy_{pix} die Laufvariable in Spaltenrichtung. X_{start} , Y_{start} bezeichnen die Koordinaten

des Anfangspunktes einer Zeile und werden zu Beginn mit den Koordinaten von P_1 initialisiert. X_u, Y_u sind die Koordinaten der interpolierten Punkte und werden aus $X_{\text{start}}, Y_{\text{start}}$ durch fortlaufende Addition von ΔX_x und ΔY_x gebildet.

procedure Flaechenhafte Interpolation

```

    (X1, Y1, X2, Y2, X3, Y3, X4, Y4 : real;
     nx, ny : integer) ;
var
     $\Delta X_x^{1,2}, \Delta X_x^{4,3}, \Delta Y_x^{1,2}, \Delta Y_x^{4,3},$ 
     $\Delta X_y^{1,4}, \Delta Y_y^{1,4}, \delta X_x, \delta Y_x,$ 
     $\Delta X_x, \Delta Y_x, X_{\text{start}}, Y_{\text{start}}, X_u, Y_u$  : real;
begin
     $\Delta X_x^{1,2} := (X_2 - X_1)/n_x;$ 
     $\Delta X_x^{4,3} := (X_3 - X_4)/n_x;$ 
     $\Delta Y_x^{1,2} := (Y_2 - Y_1)/n_x;$ 
     $\Delta Y_x^{4,3} := (Y_3 - Y_4)/n_x;$ 
     $\Delta X_y^{1,4} := (X_4 - X_1)/n_y;$ 
     $\Delta Y_y^{1,4} := (Y_4 - Y_1)/n_y;$ 
     $\delta X_x := (\Delta X_x^{4,3} - \Delta X_x^{1,2})/n_y;$ 
     $\delta Y_x := (\Delta Y_x^{4,3} - \Delta Y_x^{1,2})/n_y;$ 
     $\Delta X_x := \Delta X_x^{1,2};$ 
     $\Delta Y_x := \Delta Y_x^{1,2};$ 
     $X_{\text{start}} := X_1;$ 
     $Y_{\text{start}} := Y_1;$ 
    for iypix := 0 to ny - 1 do
        begin
             $X_u := X_{\text{start}};$ 
             $Y_u := Y_{\text{start}};$ 
            for ixpix := 0 to nx - 1 do
                begin
                     $X_u := X_u + \Delta X_x;$ 
                     $Y_u := Y_u + \Delta Y_x;$ 
                end;
             $X_{\text{start}} := X_{\text{start}} + \Delta X_y^{1,4};$ 
             $Y_{\text{start}} := Y_{\text{start}} + \Delta Y_y^{1,4};$ 
             $\Delta X_x := \Delta X_x + \delta X_x;$ 
             $\Delta Y_x := \Delta Y_x + \delta Y_x;$ 
        end;
    end;
end;
```

4. Zeitbedarf

Einen Vergleich der benötigten CPU-Zeit von flächenhaft bilinearer Interpolation, konventioneller bilinearer Interpolation und strenger Bestimmung von Zwischenpunkten unter Anwendung der Abbildungsgleichungen ist in Tab. 1 dargestellt. Die einzelnen Interpolationsverfahren laufen folgendermaßen ab:

Tabelle 1: Vergleich der benötigten CPU-Zeit (sec) für flächenhaft bilineare, konventionell bilineare Interpolation und strenger Bestimmung von Zwischenpunkten

Rechner	Anzahl Zwischenpunkte	Interpolationsverfahren		
		streng	konventionell	flächenhaft
PC AT	25 × 25	1,20	0,99	0,05
	50 × 50	4,78	4,39	0,17
	100 × 100	18,95	17,52	0,49
	200 × 200	75,85	70,41	1,93
PDP 11/73	25 × 25	0,98	0,63	0,05
	50 × 50	3,87	2,48	0,10
	100 × 100	15,40	9,85	0,38
	200 × 200	61,43	39,37	1,43
PRIME 750	25 × 25	0,30	0,14	0,01
	50 × 50	1,21	0,56	0,03
	100 × 100	4,82	2,25	0,11
	200 × 200	19,23	8,94	0,42
VAX Station 3200	25 × 25	0,08	0,04	0,00
	50 × 50	0,28	0,17	0,01
	100 × 100	1,20	0,67	0,03
	200 × 200	5,19	2,69	0,15
Transputer T800	25 × 25	-	-	0,001
	50 × 50	-	-	0,004
	100 × 100	-	-	0,014
	200 × 200	-	-	0,052

• *Strenge Transformation*

Bei der strengen Transformation werden Ankerpunkte und Zwischenpunkte unter Verwendung der Abbildungsgleichungen in das Bildkoordinatensystem abgebildet. Die Höhe der Interpolationspunkte, die ja in die Abbildungsgleichungen eingeht, wird selbst aus den Höhen der umliegenden Ankerpunkte mittels bilinearer Interpolation bestimmt; dies bedeutet, daß pro Punkt *zusätzlich* zu den Abbildungsgleichungen auch Gl. 2 einmal zu durchlaufen ist.

• *Konventionelle bilineare Interpolation*

Bei der konventionellen bilinearen Interpolation werden die Koordinaten der Ankerpunkte im Bildkoordinatensystem über die Abbildungsgleichungen berechnet. Rechts- und Hochwert der Zwischenpunkte werden jeweils über Gl. 2 aus den Koordinaten der Ankerpunkte bestimmt.

• *Flächenhafte bilineare Interpolation*

Zur flächenhaften bilinearen Interpolation werden zunächst die Ankerpunkte über die Abbildungsgleichungen streng in das Bildkoordinatensystem transformiert. Zwischenpunkte werden über das in Kap. 3 beschriebene Verfahren bestimmt.

Die Beschreibung der verschiedenen Verfahren macht schon deutlich, daß die Verfahren ganz unterschiedlichen Rechenaufwand bedeuten. Der Zeitbedarf ist in Tab. 1 für die Rechner PC AT (15 MHz, Turbo-Pascal 4.0 ohne Co-Prozessor), PRIME 750 (Pascal, double precision), DEC PDP

11/73 (TSX +, OMSI-Pascal, double precision), VAX Station 3200 (Pascal double precision) und einem Transputer Inmos T800 (Programmiersprache Occam) zusammengestellt.

Zur Verdeutlichung ist in Abb. 3 die benötigte CPU-Zeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Zwischenpunkte für den Rechner DEC PDP 11 im logarithmischen Maßstab wiedergegeben. Die graphische Darstellung unterstreicht die Effizienz des entwickelten Interpolationsverfahrens.

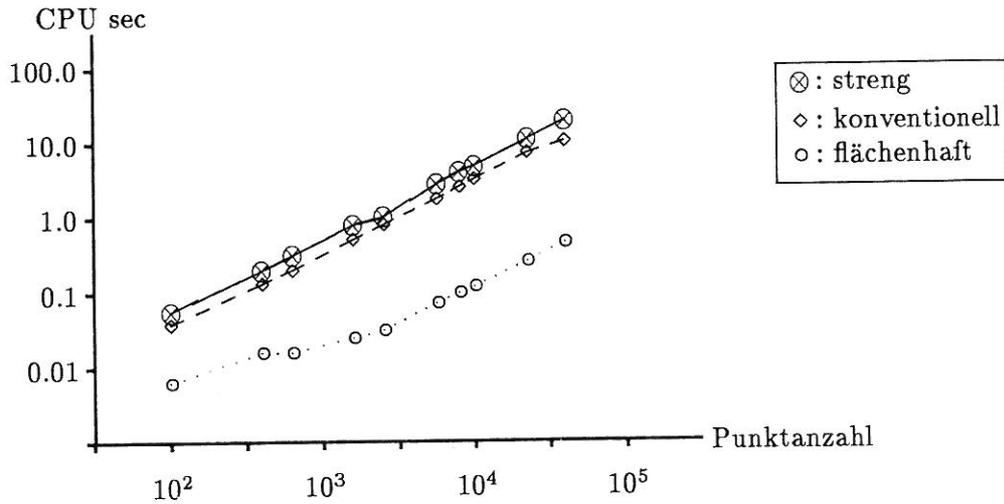


Abb. 3 Zeitvergleich verschiedener Interpolationsverfahren (DEC FDP 11/73)

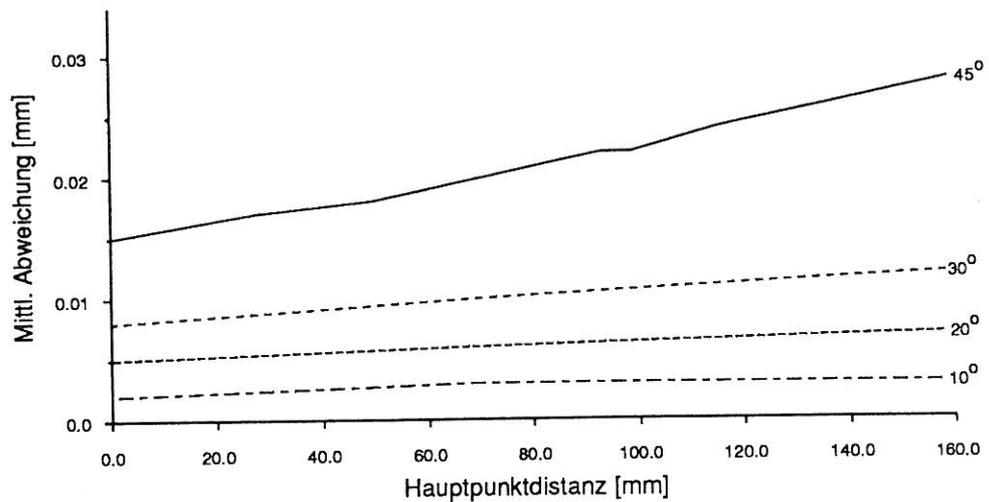


Abb. 4 Mittlere Abweichungen zwischen flächenartiger bilinearer Interpolation und strenger Transformation über Abbildungsgleichungen

5. Genauigkeit bilinearer Interpolation

Zur Bestimmung des Fehlers bei Verwendung bilinearer Interpolation statt expliziter Anwendung der Abbildungsgleichungen zur Umbildung der Zwischenpunkte im Innern der Ankerpunkt-Masche wurden synthetische Daten herangezogen (Flughöhe 2000 m, Brennweite 153 mm, Maschenweite 50 Meter).

Dabei wurden DGM-Maschen verschiedener Neigung (15°, 30°, 45°) mit unterschiedlicher Entfernung zum Nadirpunkt in die Bildebene abgebildet. Innerhalb der abgebildeten DGM-Masche wurden 11 × 11 Zwischenpunkte zum einen unter Verwendung der Abbildungsgleichungen, zum anderen durch Einsatz bilinearer Interpolation eingeschaltet. Die dabei resultierenden Lageunterschiede sind in Abb. 4 dargestellt.

Die Abweichungen zwischen flächenhafter bilinearer Interpolation und direkter Transformation über Abbildungsgleichungen nehmen mit wachsender Entfernung der DGM-Masche vom Bildhauptpunkt sowie bei steigender Geländeneigung zu. Bei einer Hangneigung von 45° treten über alle interpolierten Punkte gemittelt Abweichungen bis zu 30 µm auf, in einzelnen Punkten kann die Abweichung sogar bis zu 40 µm betragen.

Die Größe des Interpolationsfehlers ist darüber hinaus abhängig von der Maschenweite des Ankerpunktnetzes und nimmt mit wachsender Maschengröße zu (Tab. 2).

Tabelle 2: Mittlere Abweichungen zwischen bilinearer Interpolation und strenger Transformation über Abbildungsgleichungen bei verschiedener Maschenweite des Ankerpunktnetzes

Maschenweite [m]	12,5	25,0	50,0	100,0
Abweichung [µm]	2	7	27	114

Bei der Interpretation der Ergebnisse ist zu berücksichtigen, daß bei der direkten Methode unter Benutzung der Abbildungsgleichungen die Höhe ebenfalls bilinear interpoliert und somit mit entsprechender Ungenauigkeit behaftet ist. Konventionelle und flächenhafte bilineare Interpolation liefern identische Ergebnisse.

6. Zusammenfassung

Da der Verarbeitungsgeschwindigkeit von konventionellen Mikroprozessoren physikalische Grenzen gesetzt sind, müssen andere Wege zur Effizienzsteigerung von Bildverarbeitungsroutinen gesucht werden. Dabei kommen sowohl verfeinerte mathematische Methoden als auch der Einsatz spezieller Hardware, wie z. B. Parallelprozessoren, in Betracht. Ersteres wurde hier durch eine inkrementelle Lösung für bilineare Interpolation vorgestellt und auch die Effizienz des Verfahrens nachgewiesen. Auch wurde ein Ausblick auf Parallelprozessoren getan, wobei neben Allzweckrechnern *ein* Transputer zum Einsatz kam; bei Einsatz mehrerer Transputer würde sich die Rechenzeiteffizienz ungefähr proportional zu der Anzahl der eingesetzten Transputer erhöhen.

Die Untersuchung der Genauigkeit der bilinearen Interpolation zeigt, daß in stark geneigten Gebieten bei großen Maschenweiten Fehler entstehen, die nicht mehr zu vernachlässigen sind. Durch entsprechend klein gewählten Abstand der Ankerpunkte kann dieser Effekt wesentlich verringert werden. Bei Verwendung rechenzeiteffizienter Parallelprozessoren ist die strenge Transformierung aller Bildpunkte anzustreben.

Literatur:

- [1] ALBERTZ, J., KREILING, W.: Photogrammetrisches Taschenbuch. 3. Auflage, H. Wichmann Verlag Karlsruhe, 1980
- [2] BOOCHS, F.: Ein Verfahren zur Herstellung digitaler Höhenmodelle aus photogrammetrischen Stereomodellen mit Hilfe der flächenhaften Korrelation in digitalen Bildern. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 299, München, 1984
- [3] STUCKI, P.: Image Processing for Document Reproduction, in: Stucki, P. (ed.): Advances in Digital Image Processing. Plenum Press, New York and London, 1979, S. 177-218
- [4] WIESEL, J.: Paßpunktbestimmung und geometrische Genauigkeit bei der relativen Entzerrung von Abtastdaten. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 268, München, 1981
- [5] WIESEL, J., BEHR, F.J.: Orthophotoherstellung auf digitalem Wege mit dem Kern DSR 11. BUL 57 (1988), S. 80-86

Anschrift der Verfasser: Dr.-Ing. FRANZ-JOSEF BEHR, Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, Universität Karlsruhe, Englerstr. 7, D-7500 Karlsruhe, Dipl.-Ing. STEFAN LUTZ, Fa. KERN & Co. AG, CH-5001 Aarau

Eingang des Manuskriptes: 1. 3. 1989

Hochschulnachrichten**Technische Universität Wien**

Dipl.-Ing. FERDINAND SCHLOEGELHOFER wurde am 23. Juni 1989 an der Technisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät mit der Dissertation „Qualitäts- und Wirtschaftlichkeitsmodelle für die Ingenieurphotogrammetrie“ zum Dr. techn. promoviert. Referent: Prof. Dr.-Ing. KARL KRAUS; Korreferent: Prof. Dr.-Ing. HERIBERT KAHMEN.

Autorreferat

Die Bündeltriangulation erlangt bei photogrammetrischen Vermessungen im Ingenieurbereich zunehmende Bedeutung. Die Aufnahmeplanung für die photogrammetrische Punktbestimmung im Nahbereich war bisher fast ausschließlich auf den stereophotogrammetrischen Normalfall beschränkt. Bei der Bündelphotogrammetrie kann die Aufnahmeanordnung unabhängig von den optischen und mechanischen Einschränkungen herkömmlicher Auswertegeräte gewählt werden. Die Aufnahmen werden so angeordnet sein, daß sich in den Neupunkten gute Schnittbedingungen ergeben und das Bildformat maximal genutzt wird.

In dieser Arbeit werden zunächst für sehr unterschiedliche Objektformen praxismgerechte Aufnahmeanordnungen unter Einbeziehung verschiedener Paßpunktverteilungen ermittelt. Mit Hilfe des Bündelausgleichsprogramms ORIENT und mit synthetisch erzeugten Bildkoordinaten werden einige hundert Varianten durchgerechnet und daraus einfache, für den Praktiker einprägsame Genauigkeitsgesetze (Faustformeln) abgeleitet. Eine Kennzahl für die innere Zuverlässigkeit und eine Kennzahl für den Aufwand der gewählten Variante ermöglichen dem Anwender, eine optimale Aufnahmeanordnung für seine Aufgabe zu finden. Die den Anwendern aus der Stereophotogrammetrie geläufige Aufnahme disposition liefert in der Regel die schlechtesten Kennzahlen für die Genauigkeit und innere Zuverlässigkeit, dafür aber die Möglichkeit, stereoskopisch linienweise auswerten zu können.

Im zweiten Teil der Arbeit werden dann einige praktische Anwendungen der modernen Bündelphotogrammetrie vorgestellt. Es werden dabei die theoretisch ermittelten Genauigkeitswerte und Kennzahlen für die Zuverlässigkeit und Wirtschaftlichkeit mit den tatsächlich erreichten Genauigkeiten und Zuverlässigkeiten und dem benötigten Aufwand verglichen.

Die Dissertation erscheint als Heft Nr. 32 der Geowissenschaftlichen Mitteilungen der Studienrichtung Vermessungswesen der Technischen Universität Wien.